



TITLE:

# C.J. Everettの仕事の紹介 (数論的関数の特性)

AUTHOR(S):

竹内, 護

---

CITATION:

竹内, 護. C.J. Everettの仕事の紹介 (数論的関数の特性). 数理解析研究所講究録 1976, 274: 178-179

ISSUE DATE:

1976-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105966>

RIGHT:

## C. J. Everett の仕事の紹介

茨城大・理 竹内 護

これは, C. J. Everett, 'Fermat's conjecture, Roth's theorem, Pythagorean triangles, and Pell's equation', Duke Math. (1974) の紹介である. この中で, 彼は, Fermat's equation に Roth's theorem を応用している. Everett の結果は次の通り:

定理(Everett). 奇素数  $p \geq 3$  と, 整数  $v \geq 1$  を fix する.  
そのとき, 直線  $y = x + v$  上には,  $x^p + y^p$  が整数の  $p$  べきであるような互いに素な整数の組  $(x, y)$  はせいぜい有限個しか存在しない.

次に証明の概略を述べる. 今  $(x, y)$  を定理の条件を満たす一組の解とする.  $z$  は  $x^p + y^p = z^p$  を満たす整数とする.  $b = \frac{v}{2}$ ,  $a = x + b$  とおく. その時, 次の (1), (2) は容易に出る:

(1)  $z^p = (a-b)^p + (a+b)^p = 2a(a^{p-1} + C_2^p a^{p-3} b^2 + \dots + C_{p-3}^p a^2 b^{p-3} + C_{p-1}^p b^{p-1})$ ,

$$(2) \quad 0 < (z - z^{1/p} a) p (z^{1/p} a)^{p-1} < z^p - z a^p = z a (C_2^p a^{p-2} z^2 + \dots + C_{p-1}^p a^{p-1}) < a^{p-2} K,$$

$$0 < \frac{z}{a} - z^{1/p} < \frac{K'}{a^2},$$

ここで,  $K, K'$  は  $v$  と  $p$  にのみ依存する定数である.

Everett は, まず  $v$  が奇数, 偶数の場合に分け, 更に,  $p \nmid z$ ,  $p \mid z$  の場合に分けて証明している. すべて同じ論法なので, ここでは,  $v$  が奇数,  $p \nmid z$  の場合だけを述べる.

$u = za$  とおく.  $zx = u - v$ ,  $zy = u + v$  がすぐわかる. これより,  $u$  と  $v$  は両方とも奇数で,  $(u, v) = 1$  である. (1) から,

$$(3) \quad z^p z^p = zu(u^{p-1} + C_{p-2}^p u^{p-3} v^2 + \dots + C_{p-2}^p u^2 v^{p-3} + C_{p-1}^p v^{p-1}) \equiv zuq'$$

がわかる. これより,  $z^{p-1} \mid q'$  で,  $z^p = uq''$ ,  $q' \equiv z^{p-1} q''$  を得る.

(3) から,  $p \mid u \Rightarrow p \mid z$  が出る. 上の仮定から,  $p \nmid u$  で,  $(u, q') = (u, q'') = 1$  が出る. これより,  $za = u = z_1^p$ ,  $z = z_1 z_2$ ,  $(z_1, z_2) = 1$  が出る. これを (2) に代入すると,

$$0 < \frac{z z_2}{z_1^{p-1}} - z^{1/p} < \frac{K'}{z_1^{p-1}} = \frac{K'}{(z_1^{p-1})^{1+\varepsilon}}, \quad \varepsilon = \frac{2}{p-1}$$

を得る.  $z_1^p = u = za = zx + v$  であるから, 異なる  $x$  に, 異なる  $z_1$  が対応する. これから, Roth's theorem より, 定理の条件を満たす  $(x, y)$  はせいぜい有限個しか存在しない.

附記. M 氏に何が, たところによれば, この結果の effective な証明 (Baker 流の) がすでにあるそうです.